30/5/16

Άσκηση 4

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

$P^{-1} \cdot B \cdot P = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ διαγώνιος

Του πίνακα A: $\chi_A(x) = x^2+1$ $\rightarrow$ Δεν είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων, άρα ο πίνακας δεν είναι διαγωνίσιμος.

Του πίνακα B: $\chi_A(x) = (x+i)(x-i)$ $\rightarrow$ Είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων διαφορετικών μεταξύ τους, άρα είναι διαγωνίσιμος.

Επομένως $P^{-1} \cdot B \cdot P = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} V(i) = \langle \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \\ V(-i) = \langle \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \end{array}\right\} \rightarrow P = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 7

$A^t = A \ , A \in R^{n \times n} \qquad A^3 = A^2 \Rightarrow A^2 = A$

$A^t = A \xrightarrow[\text{Θεώρημα}]{\text{Φασματικό}}$ A διαγωνίσιμος $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Το ελάχιστο πολυώνυμο είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων διαφορετικών μεταξύ τους

$A^3 = A^2 \Rightarrow$ Ο A μηδενίζει το πολυώνυμο $x^3 - x^2$

$\Rightarrow m_A(x) \,/\, x^3 - x^2 = x^2(x-1)$

Διαιρέτες του $x^2(x-1)$ είναι

$\cancel{1}$

$x$

$\cancel{x^2}$ *

$x-1$

$x(x-1)$

$\cancel{x^2(x-1)}$

* Είναι ελάχιστο πολυώνυμο ΔΙΑΓΩΝΙΣΙΜΟΥ ΠΙΝΑΚΑ!

Το $m_A(x)$ δεν είναι το $x^2$ ή το $x^2(x-1)$ γιατί ο A είναι διαγωνίσιμος και τα πολυώνυμα αυτά δεν είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων διαφορετικών μεταξύ τους.

Άρα: i) $m_A(x) = x$
ii) $m_A(x) = x-1$
iii) $m_A(x) = x(x-1)$

Και τα τρία πολυώνυμα διαιρούν το $x^2 - x = x(x-1)$

Άρα σε κάθε περίπτωση το $x^2 - x$ είναι πολλαπλάσιο του $m_A(x)$ άρα μηδενίζεται από τον πίνακα A. Συνεπώς ισχύει $A^2 = A$.

Άσκηση 8

$Q(x,y) = 2xy$

$$\underset{2\times 2 \to}{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ιδιοτιμές: $\chi_A(x) = \det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix} = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

$Q(x,y) = 2xy$

$q(z_1, z_2) = \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = z_1^2 - z_2^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \text{όπου} \quad P^{-1} A \cdot P = \underset{\text{ιδιοτιμές}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

$$V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle \qquad V(-1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Άρα $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Επομένως $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^t P \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ Άρα $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$Q(x,y) = 2xy = 1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2$$

Άσκηση 9

$A^2 + \alpha \cdot A + b \cdot I_n = 0 \qquad \alpha, b \in \mathbb{R}$

i) Αν $\alpha^2 - 4b > 0$ ο A διαγωνίσιμος

Ο πίνακας A μηδενίζει το πολυώνυμο $f(x) = x^2 + \alpha x + b$
$\Rightarrow m_A(x) \mid f(x)$

$\alpha^2 - 4b > 0 \Rightarrow \Delta > 0$ άρα το πολυώνυμο $f(x)$ έχει 2 διαφορετικές ρίζες δηλαδή είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων διαφορετικών μεταξύ τους.

Το $m_A(x) \mid f(x)$ άρα και αυτό είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων διαφορετικών μεταξύ τους
(δηλαδή το $m_A(x)$ είναι το $x-\rho_1$ ή $x-\rho_2$ ή $(x-\rho_1)(x-\rho_2)$)
$\Rightarrow$ ο πίνακας A είναι διαγωνίσιμος.

Αν $\alpha^2 - 4b < 0$ τότε ο A δεν είναι διαγωνίσιμος.
Ο A μηδενίζει το πολυώνυμο $f(x) = x^2 + \alpha x + b$
άρα $m_A(x) \mid x^2 + \alpha x + b$ $\Delta < 0$ άρα $m_A(x)$ ανήκει στους διαιρέτες του $x^2 + \alpha x + b$ δηλαδή
$m_A(x) \in \{1, x^2 + \alpha x + b\} \Rightarrow m_A(x) = x^2 + \alpha x + b$

Άρα το $m_A(x)$ δεν είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων.
Συνεπώς ο A δεν είναι διαγωνίσιμος

Αν $\alpha^2 - 4b = 0$ και A διαγωνίσιμος
Ο A μηδενίζει το πολυώνυμο $f(x) = x^2 + \alpha x + b$ άρα
$m_A(x) \mid x^2 + \alpha x + b = x^2 + \alpha x + \frac{\alpha^2}{4} = \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2$

$m_A(x) \mid \left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2$

Α διαγωνίσιμος $\Rightarrow$ ελάχιστο πολυώνυμο (το $m_A(x)$) είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων διαφορετικών μεταξύ των.

$$m_A(x) / \left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow m_A(x) = x+\frac{\alpha}{2}$$

$$m_A(A)=0 \Rightarrow A+\frac{\alpha}{2} I_n = 0 \Rightarrow A = -\frac{\alpha}{2} I_n$$

Αντίστροφα ...

Έστω $A = -\frac{\alpha}{2} I_n = \begin{pmatrix} -\alpha/2 & & 0 \\ & -\alpha/2 & \\ 0 & & \ddots \; -\alpha/2 \end{pmatrix}$

Α διαγώνιος άρα Α διαγωνίσιμος

iv) $b \neq 0 \Rightarrow A$ αντιστρέψιμος

$$A^2 + \alpha \cdot A + b \cdot I_n = 0 \iff$$

$$A^2 + \alpha \cdot A = -b \cdot I_n \iff$$

$$-\frac{1}{b} A (A + \alpha \cdot I_n) = I_n \iff$$

$$A\left(-\frac{1}{b}(A+\alpha \cdot I_n)\right) = I_n$$

άρα Α αντιστρέψιμος και $A^{-1} = -\frac{1}{b}(A+\alpha \cdot I_n)$

Ερώτηση

Έστω $\chi_A(x) = (x-1)^2(x+2)^2$

$$m_A(x) \in \Big\{ \underbrace{(x-1)(x+2)}_{\text{Αν Α διαγωνίσιμος}}, (x-1)^2(x+2), (x-1)(x+2)^2, (x-1)^2(x+2)^2 \Big\}$$

Ελέγχουμε με τη σειρά ποιο κάνει ο μηδενισμό

$(A-I)(A+2I) \neq 0$

$(A-I)^2(A+2I)$ ...

$(x-1)^2(x+2)^2$ το μηδενίζει γιατί $(x-1)^2(x+2)^2 = \chi_A(x)$

Άσκηση 10

A αντιστρέψιμος

$\lambda$ ιδιοτιμή του A: Έστω $\lambda=0 \Rightarrow$

$\det(A-0\cdot I)=0 \Rightarrow \det A=0$

Άτοπο αφού A αντιστρέψιμος, άρα $\lambda \neq 0$

$\lambda \neq 0$ $\lambda$ ιδιοτιμή του $A \Rightarrow \exists\, X \in K^{n\times 1}, X \neq 0_{n\times 1}$

τ.ω. $A\cdot X = \lambda \cdot X$

$A^{-1}(A\cdot X) = A^{-1}\cdot(\lambda \cdot X) \Rightarrow$

$(A^{-1}A)\cdot X = \lambda A^{-1} X \Leftrightarrow$

$A^{-1}\cdot X = \frac{1}{\lambda}\cdot X \qquad X \neq 0_{n\times 1}$

άρα $\frac{1}{\lambda}$ ιδιοτιμή του $A^{-1}$

$V_A(\lambda) = V_{A^{-1}}(\lambda^{-1})$

Έστω $X \in V_A(\lambda) \Rightarrow A\cdot X = \lambda \cdot X$ ΝΔΟ $X \in V_{A^{-1}}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

$AX = \lambda X \Leftrightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = \lambda \cdot A^{-1} X \Leftrightarrow X = \lambda \cdot A^{-1} X \Leftrightarrow$

$A^{-1}\cdot X = \frac{1}{\lambda}\cdot X$

Άσκηση 12

$\lambda \neq \mu$ ιδιοτιμή $T: V \to V$ $\vec{u}, \vec{v}$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα

νδο $\vec{u}, \vec{v}$ Γ.Α.

Έστω $\alpha\vec{u} + b\cdot\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$

$T(\alpha\vec{u} + b\cdot\vec{v}) = T(\vec{0}) \overset{T \text{ γραμμική}}{\Longrightarrow}$

$\alpha\cdot T(\vec{u}) + b\cdot T(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow$

από ορισμό → $\left.\begin{array}{l}\alpha\cdot\lambda\vec{u} + b\cdot\mu\cdot\vec{v} = \vec{0} \\ \alpha\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0} \\ \lambda\alpha\vec{u} + b\mu\vec{v} - \lambda(\alpha\vec{u} + b\vec{v}) = \vec{0}\end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l}\alpha\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0} \\ (\mu b - b\cdot\lambda)\vec{v} = 0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\alpha\vec{u} + b\vec{v} = 0 \\ b(\mu-\lambda)\vec{v} = \vec{0}\end{array}\right\}$

- $\left.\begin{array}{l}b(\mu-\lambda)\cdot\vec{v} = \vec{0} \\ \vec{v} \neq \vec{0} \\ \mu \neq \lambda\end{array}\right\}$ Άρα $\underline{\underline{b=0}}$

$\left.\begin{array}{l}\alpha\vec{u} + b\vec{v} = 0 \\ b = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha\vec{u} = \vec{0} \\ \vec{u} \neq \vec{0}\end{array}\right\}$ $\alpha = 0$

$\alpha = b = 0 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ Γ.Α.

β) $\alpha, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ νδο $\alpha\vec{u} + b\vec{v}$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα

Έστω ότι $\alpha\vec{u} + b\vec{v}$ ιδιοδιάνυσμα τότε $\alpha\vec{u} + b\vec{v} \neq \vec{0}$

και $T(\alpha\vec{u} + b\vec{v}) = k(\alpha\vec{u} + b\vec{v})$, η T γραμμική

$\alpha\cdot T(\vec{u}) + b\cdot T(\vec{v}) = k\alpha\vec{u} + k\cdot b\vec{v} \Rightarrow$

$\alpha\cdot\lambda\vec{u} + b\cdot\mu\cdot\vec{v} = k\alpha\vec{u} + k b\vec{v} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l}(\alpha\cdot\lambda - k\alpha)\cdot\vec{u} + (b\mu - k\cdot b)\cdot\vec{v} = \vec{0} \\ \vec{u}, \vec{v} \text{ Γ.Α}\end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l}\alpha(\lambda-k) = 0 \overset{\alpha\neq 0}{\Longrightarrow} \lambda = k \\ b(\mu-k) = 0 \overset{b\neq 0}{\Longrightarrow} \mu = k\end{array}\right\}$ $\mu = \lambda$ Άτοπο, αφού $\mu \neq \lambda$

Άρα $\alpha\vec{u} + b\vec{v}$ δεν είναι ιδιοδιάνυσμα